Solución 1.

Mostrar $\angle GED = \angle DCF$: **1 punto.**

Mostrar que $\angle GED = \angle DPA$: **2 puntos.**

Concluir que $GDPE$ es cíclico: **1 punto.**

Suponiendo que $GDPE$ es cíclico, concluir: **3 puntos.**

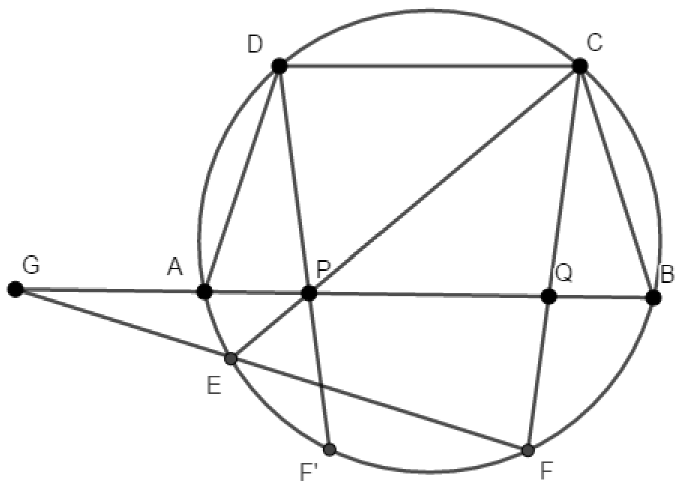
> **1 punto** parcial por demostrar que $\angle GDE = \angle GPE$ o $\angle GPE = \angle DCP$.

Nota: No se otorgarán puntos por ángulos únicamente en la figura a excepción de $\angle GED = \angle DCF$.

Solución 2.

Sea F' el punto de intersección de DP con Γ. Por simetría FF' es paralela a CD. Aplicando Pascal en el hexágono $DDCEFF'$ vemos que el punto de intersección de DD y EF está en la paralela a CD por P, la cual es AB. Como G es el punto de intersección de AB y EF, se sigue que GD es tangentre a Γ.

■



Considerar a F' el punto de intersección de DP con Γ y mostrar $FF' \parallel CD$: **1 punto.**

Pascal en $DDCEFF'$ y terminar: **6 puntos.**

Solución 3.

Demostramos el siguiente Lema: Sean A, B, C y D puntos en una circunferencia y supongamos que las líneas AB y CD se cortan en un punto P. Entonces $\frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD}$.

Demostración. De las semejanzas $APC \sim DPB$ y $APD \sim CPB$ obtenemos:

$$PA = DP \cdot \frac{AC}{BD} \quad \text{y} \quad PB = DP \cdot \frac{BC}{AD} \implies \frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD}.$$

De vuelta al problema original al aplicar el Lema en $ABFE$ con el punto G:

$$\frac{GA}{GB} = \frac{AE}{BE} \cdot \frac{AF}{BF}.$$

Aplicando el Lema en $ACBE$ con el punto P, lo anterior es igual a:

$$\frac{BC}{AC} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{AF}{BF}.$$

Aplicando el Lema en $ACBF$ con el punto Q, lo anterior es igual a:

$$\frac{BC}{AC} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AQ}{QB}.$$

Despejando y por simetría, esto es igual a:

$$\frac{BC^2}{CA^2} = \frac{DA^2}{DB^2}.$$

Como el único punto H en el rayo BA tal que $\frac{HA}{HB} = \frac{DA^2}{DB^2}$ es el punto donde la tangente a Γ por D corta a AB (esto por el Lema en $ABDD$ con el punto H), se sigue que $G \equiv H$. Más aún, GD es tangente a Γ.

■

Demostrar y aplicar el Lema una primera vez: **2 puntos.**

Mencionar $\frac{BC}{AC} = \frac{AD}{BD}$ por simetría: **1 punto.**

Aplicar el Lema una segunda vez (ya sea en el caso $C = D$ o en otro cuadrilatero de la solución): **1 punto.**

Concluir: **3 puntos.**

Punto no acumulable: Mencionar $AP = QB$, $AQ = PB$, $BC = AD$ y $AC = BD$.

Nota: No se otorgarán puntos por mencionar $BC = AD$ o $AC = BD$. De la misma manera, no se otorgarán puntos por semejanzas que ayuden a demostrar el Lema.

Criterio del problema 5

Dar buen camino en caso par ……….1pt
Dar buen camino en caso impar……..1pt
Demostración en caso par……………2pt
Demostración en caso impar………..3pt

Criterio Problema 6

Dennis y Max

14 de septiembre de 2019

2 puntos. Probar que $A = \{p \text{ primo} | \exists n \in \mathbb{N} \ (p|P(n))\}$ es infinito.

- Si no menciona "Teorema de Schur":
  - **1 punto.** Asumir $P(0) \neq 0$*. Si $A = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_l\}$, sea t_0 tal que para toda i, $p_i^{t_0}$ no divide a $P(0)$ y probar que para toda $t \geq t_0$, $|P((p_1p_2p_3\cdots p_l)^t)| \leq (p_1p_2p_3\cdots p_l)^{t_0}$.
  - **1 punto.** Contradecir el hecho de que A sea finito.
- Si se menciona el teorema de Schur, tiene que decir el nombre del teorema y especificar qué dice el teorema.

5 puntos. Generar la contradicción probando que A es finito usando la hipótesis.

- **1 punto.** Considerar un primo $p \in A$ tal que $p > 2019$ y para toda i, $p > a_i$.
- **2 puntos.** Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $p|P(n)$. Entonces existe m entero tal que $p|P((p-1)(pm-n))$ y $pm - n > 0$.
- **2 puntos.** Concluir que $p|2019$, generar la contradicción buscada.

**NOTA:* si no se menciona el caso $P(0) = 0$, se penalizará con 1 punto.