



XXXIV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS

Primer día

15 de septiembre de 2019

Problema 1. Para cada entero positivo n , sea $s(n)$ la suma de los cuadrados de los dígitos de n . Por ejemplo, $s(15) = 1^2 + 5^2 = 26$. Determina todos los enteros $n \geq 1$ tales que $s(n) = n$.

Problema 2. Determina todos los polinomios $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes enteros tales que para todo número real x se cumple

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n - 1)).$$

Problema 3. Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC . La paralela a AC que pasa por B corta a Γ en D ($D \neq B$) y la paralela a AB que pasa por C corta a Γ en E ($E \neq C$). Las rectas AB y CD se cortan en P , y las rectas AC y BE se cortan en Q . Sea M el punto medio de DE . La recta AM corta a Γ en Y ($Y \neq A$) y a la recta PQ en J . La recta PQ corta al circuncírculo del triángulo BCJ en Z ($Z \neq J$). Si las rectas BQ y CP se cortan en X , demuestra que X pertenece a la recta YZ .

Nota. El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo.

*Duración del examen: 4 horas 30 minutos.
Cada problema tiene un valor de 7 puntos.*