



XXXIV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS

Segundo día

16 de septiembre de 2019

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ e inscrito en la circunferencia Γ . Sean P y Q dos puntos en el segmento AB (A, P, Q, B están en ese orden y son distintos) tales que $AP = QB$. Sean E y F los segundos puntos de intersección de las rectas CP y CQ con Γ , respectivamente. Las rectas AB y EF se cortan en G . Demuestra que la recta DG es tangente a Γ .

Problema 5. Don Miguel coloca una ficha en alguno de los $(n + 1)^2$ vértices determinados por un tablero de $n \times n$. Una *jugada* consiste en mover la ficha desde el vértice en que se encuentra a un vértice adyacente en alguna de las ocho posibles direcciones: $\uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow, \nearrow, \searrow, \swarrow, \nwarrow$ siempre y cuando no se salga del tablero. Un *recorrido* es una sucesión de jugadas tal que la ficha estuvo en cada uno de los $(n + 1)^2$ vértices exactamente una vez. ¿Cuál es la mayor cantidad de jugadas diagonales ($\nearrow, \searrow, \swarrow, \nwarrow$) que en total puede tener un recorrido?

Problema 6. Sean $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ enteros positivos y P un polinomio con coeficientes enteros tal que, para todo entero positivo n ,

$$P(n) \text{ divide a } a_1^n + a_2^n + \dots + a_{2019}^n.$$

Demuestra que P es un polinomio constante.

*Duración del examen: 4 horas 30 minutos.
Cada problema tiene un valor de 7 puntos.*